LIÈGE université
Sciences

1, 2, 3...Sciences

Année académique 2018-2019

Corrigé de l'examen de mathématique du 22 août 2019

Version 18 août 2019

QUESTIONNAIRE

Théorie

Théorie 1

(a) Définir géométriquement le produit scalaire de deux vecteurs.

(b) En établir (énoncé + preuve) l'expression analytique dans une base orthonormée du plan.

Théorie 2

(a) Définir les notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction g d'une variable en un point t de son domaine de définition.

(b) Enoncer et démontrer le lien entre ces deux notions.

Exercices

1. (a) Résoudre dans $\mathbb{R}$
$$|x|(2-x) \leq |x^2| + x.$$
   (b) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$, résoudre l'équation suivante
$$\cos(2x) = 3\sin(x) + 2.$$
   (c) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante
$$\exp\left(\frac{\ln(\pi)}{2}\right).$$
   (d) Déterminer le module du complexe
$$z = \frac{i - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + i^{15}}.$$

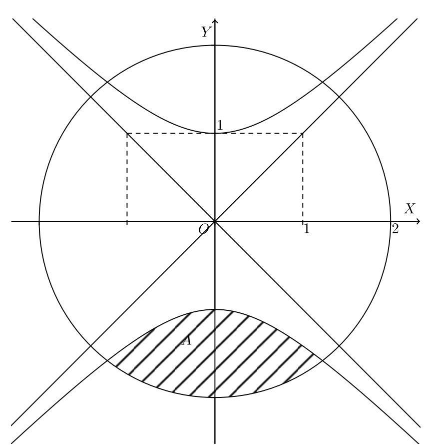
2. Si elles existent, déterminer les limites suivantes.

$$\text{(a)} \lim_{x \to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\arccos(x)}\right) \qquad \text{(b)} \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(|x-1|)}{|1-x^2|}$$

3. Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.

$$\text{(a)} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2}\, dx \qquad \text{(b)} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\operatorname{tg}^2(2x)}{2}\, dx$$

4. Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une hyperbole et l'autre est un cercle.)



5. (a) Si la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x\ \ln^2(x)}{2}$ vérifie l'équation différentielle

$$x^2\, D^2 f(x) - x\ Df(x) + f(x) = g(x), \quad x \in]0, +\infty[,$$

que vaut $g(x)$?

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$2D^2 f(x) + Df(x) = 2x.$$

6. Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.
Une balle est tirée horizontalement sur une cible et on entend le bruit de l'impact 1,6 seconde plus tard. Si la vitesse de la balle est de 1020 m/s et la vitesse du son 340 m/s, quel est l'éloignement de la cible ?

CORRIGE

Théorie

Théorie 1

(a) Définir géométriquement le produit scalaire de deux vecteurs.
(b) En établir (énoncé + preuve) l'expression analytique dans une base orthonormée du plan.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Théorie 2

(a) Définir les notions de continuité et de dérivabilité d'une fonction g d'une variable en un point t de son domaine de définition.
(b) Enoncer et démontrer le lien entre ces deux notions.

Pour une réponse « type », voir cours (syllabus et cours enseigné).

Exercices

1. **(a) Résoudre dans $\mathbb{R}$**

$$|x|(2-x) \leq |x^2| + x.$$

Solution. Comme x est un réel, x^2 est un réel positif. Dès lors,

$$|x|(2-x) \leq |x^2| + x \ \Leftrightarrow\ |x|(2-x) \leq x(x+1).$$

Si $x = 0$, on a $0 \leq 0$ et l'inéquation est vérifiée.
Si $x > 0$, on a $|x| = x$ et l'inéquation est équivalente à

$$\begin{aligned} x(2-x) \leq x(x+1) \quad &\Leftrightarrow \quad 2 - x \leq x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -2x \leq -1 \\ &\Leftrightarrow \quad x \geq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Si $x < 0$, on a $|x| = -x$ et l'inéquation est équivalente à

$$\begin{aligned} -x(2-x) \leq x(x+1) \quad &\Leftrightarrow \quad -(2-x) \geq x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 + x \geq x + 1 \\ &\Leftrightarrow \quad -2 \geq 1, \end{aligned}$$

qui est impossible.
L'ensemble des solutions est donc $S = \{0\} \cup [1/2, +\infty[$.
(b) Sachant que l'inconnue réelle x appartient à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$, résoudre l'équation suivante

$$\cos(2x) = 3\sin(x) + 2.$$

Solution. On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$. Dès lors

$$\cos(2x) = 3\sin(x) + 2 \;\Leftrightarrow\; 1 - 2\sin^2(x) = 3\sin(x) + 2 \;\Leftrightarrow\; 2\sin^2(x) + 3\sin(x) + 1 = 0.$$

Cela étant, les solutions de l'équation polynomiale $2X^2 + 3X + 1 = 0$ étant les réels -1 et $-1/2$, on a

$$\cos(2x) = 3\sin(x) + 2 \;\Leftrightarrow\; 2(\sin(x) + 1)\left(\sin(x) + \frac{1}{2}\right) = 0.$$

Ainsi

$$\cos(2x) = 3\sin(x) + 2 \;\Leftrightarrow\; \sin(x) = -1 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = -\frac{1}{2}.$$

Examinons les deux égalités de droite. On a d'une part

$$\sin(x) = -1 \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

et d'autre part

$$\sin(x) = -\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; \exists k \in \mathbb{Z} : x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi.$$

L'équation de départ a donc pour ensemble de solutions

$$S = \left\{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\} \bigcup \left\{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi \;:\; k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

Les solutions qui appartiennent à l'intervalle $[\pi, 3\pi]$ sont

$$\frac{3\pi}{2}, \; \frac{7\pi}{6}, \; \frac{11\pi}{6}.$$

(c) Après avoir justifié si elle est définie, simplifier au maximum l'expression suivante

$$\exp\left(\frac{\ln(\pi)}{2}\right).$$

Solution. Comme la fonction ln est définie sur $]0, +\infty[$, que son ensemble image, $\mathbb{R}$, est le domaine de définition de l'exponentielle et que $\pi > 0$, l'expression est définie.
Dès lors, vu que $a\ln(x) = \ln(x^a), \forall a \in \mathbb{R},\ x > 0$, on a

$$\exp\left(\frac{\ln(\pi)}{2}\right) = \exp\left(\ln\left(\sqrt{\pi}\right)\right) = \sqrt{\pi},$$

puisque les fonctions ln et exp sont inverses l'une de l'autre.
(d) Déterminer le module du complexe

$$z = \frac{i - \sqrt{2}}{\sqrt{3} + i^{15}}.$$

Solution. Comme $i^{15} = i^3 = -i$, on a

$$|z| = \left|\frac{i - \sqrt{2}}{\sqrt{3} - i}\right| = \frac{|i - \sqrt{2}|}{|\sqrt{3} - i|} = \frac{\sqrt{1+2}}{\sqrt{3+1}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Le module de ce nombre vaut donc $\sqrt{3}/2$.

2. **Si elles existent, déterminer les limites suivantes.**

$$\textbf{(a)} \lim_{x \to 1^-} \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\arccos(x)}\right) \qquad\qquad \textbf{(b)} \lim_{x \to -\infty} \frac{\ln(|x-1|)}{|1-x^2|}$$

Solution. **(a)** La fonction $x \mapsto \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\arccos(x)}\right)$ est définie sur $A = [-1, 1[$. Puisque tout intervalle ouvert comprenant 1 rencontre $A \cap]-\infty, 1[= [-1, 1[$, le calcul de la limite en 1^- peut être envisagé.

Puisque $\lim_{x \to 1^-} \arccos(x) = 0^+$, $\lim_{y \to 0^+} \frac{1}{y} = +\infty$ et $\lim_{z \to +\infty} \operatorname{arctg}(z) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$, on a

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{\arccos(x)}\right) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^-$$

par le théorème de la limite des fonctions de fonction.

(b) La fonction $x \mapsto \frac{\ln(|x-1|)}{|1-x^2|}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, ensemble non minoré ; la limite en $-\infty$ peut donc être envisagée.

Comme $\lim_{x \to -\infty} \ln(|x-1|) = \lim_{x \to -\infty} \ln(1-x) = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} (|1-x^2|) = \lim_{x \to +\infty} (x^2-1) = +\infty$, levons l'indétermination "∞/∞" en appliquant le théorème de l'Hospital. Pour cela, vérifions-en d'abord les hypothèses.

Dans $V =]-\infty, -1[$, considérons $f_1 : x \mapsto \ln(1-x)$ et $f_2 : x \mapsto x^2 - 1$.

1) Ces deux fonctions sont dérivables sur V.

2) La dérivée de f_2 vaut $2x$ et est non nulle sur V.

3) De plus, $\lim_{x \to -\infty} \frac{Df_1(x)}{Df_2(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{-1}{1-x}}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{-1}{2x(1-x)} = 0.$

Dès lors, par application du théorème de l'Hospital, la limite demandée vaut 0^+.

3. **Si elles existent, déterminer la valeur des intégrales suivantes et simplifier votre réponse au maximum.**

$$\textbf{(a)} \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2}\, dx \qquad\qquad \textbf{(b)} \int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\operatorname{tg}^2(2x)}{2}\, dx$$

Solution. **(a)** La fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)}$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-2, 1\}$ donc sur $[2, +\infty[$, ensemble fermé non borné. Pour vérifier l'intégrabilité de la fonction en $+\infty$, on peut utiliser le critère en θ de la manière suivante : calculons la limite

$$\lim_{x \to +\infty} \left(x^2 \left|\frac{1}{x^2+x-2}\right|\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2}{x^2+x-2}\right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

Comme cette limite existe et est finie avec $\theta = 2 > 1$, par le critère d'intégration en θ, f est intégrable en $+\infty$ donc finalement sur $[2, +\infty[$.

Décomposons la fraction donnée en une somme de fractions simples ; on a

$$\frac{1}{x^2+x-2} = \frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} = \frac{A(x+2)+B(x-1)}{x^2+x-2},\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 1\},$$

ce qui donne $A = 1/3$ et $B = -1/3$.

Sur $]1, +\infty[$, on a

$$\int \left(\frac{1}{3(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)}\right) dx \quad = \quad \frac{1}{3}\left(\int \frac{1}{x-1}\, dx - \int \frac{1}{x+2}\, dx\right)$$

$$\begin{aligned}
&\simeq \frac{1}{3}\left(\ln(|x-1|) - \ln(|x+2|)\right)\\
&\simeq \frac{1}{3}\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right).
\end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2+x-2}\,dx &= \left[\frac{1}{3}\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right)\right]_2^{x\to+\infty}\\
&= \frac{1}{3}\left(\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\left|\frac{x-1}{x+2}\right|\right) - \ln\left(\frac{1}{4}\right)\right)\\
&= \frac{1}{3}\left(\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) + \ln\left(2^2\right)\right)\\
&= \frac{2\ln(2)}{3},
\end{aligned}$$

l'application du théorème de la limite d'une fonction de fonction donnant

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = 0 \text{ car } \lim_{x\to+\infty}\frac{x-1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{y\to1}\ln(y) = 0.$$

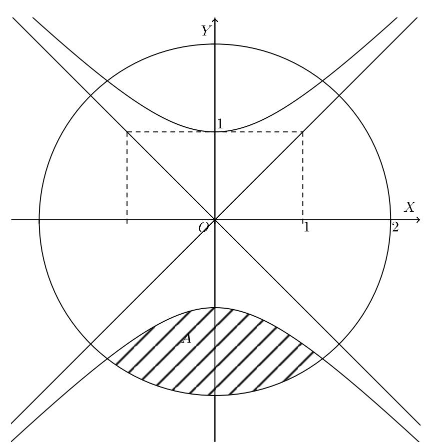
Remarque : puisque la fonction est positive sur l'intervalle d'intégration, on pourrait également prouver l'intégrabilité en utilisant la définition.

(b) La fonction $f : x \mapsto \left(1+\mathrm{tg}^2(2x)\right)/2$ est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{\pi/4 + k\pi/2 : k\in\mathbb{Z}\}$; elle est donc continue sur l'intervalle $[\pi/3, \pi/2]$, fermé borné. Elle y est donc intégrable.
Dès lors, par variation de primitive, on a

$$\begin{aligned}
\int_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{1+\mathrm{tg}^2(2x)}{2}\,dx &= \frac{1}{4}\int_{\pi/3}^{\pi/2} 2\left(1+\mathrm{tg}^2(2x)\right)\,dx\\
&= \frac{1}{4}\left[\ \mathrm{tg}(2x)\ \right]_{\pi/3}^{\pi/2}\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathrm{tg}\left(\frac{2\pi}{2}\right) - \mathrm{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\mathrm{tg}\,(\pi) + \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{4},
\end{aligned}$$

puisque $\mathrm{tg}(\pi) = 0$ et $\mathrm{tg}(\pi/3) = \sqrt{3}$.

4. **Décrire analytiquement l'ensemble A fermé hachuré suivant en commençant par l'ensemble de variation des ordonnées puis, à ordonnée fixée, l'ensemble de variation des abscisses. (L'une des courbes délimitant l'ensemble est une hyperbole et l'autre est un cercle.)**



Solution.
L'ensemble A est délimité par une hyperbole d'équation

$$-x^2+y^2=1 \Leftrightarrow x=-\sqrt{y^2-1} \text{ ou } x=\sqrt{y^2-1}$$

et un cercle d'équation

$$x^2+y^2=4 \Leftrightarrow x=-\sqrt{4-y^2} \text{ ou } x=\sqrt{4-y^2}.$$

L'ordonnée des points d'intersection de ces deux courbes vaut $-\sqrt{10}/2$, puisqu'elle vérifie l'équation

$$2y^2=5 \Leftrightarrow y^2=5/2 \Leftrightarrow y=-\frac{\sqrt{10}}{2} \text{ ou } y=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

et est négative. Dès lors, l'ensemble fermé hachuré est décrit analytiquement par

$$\begin{aligned} A &= \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in\left[-2,-\frac{\sqrt{10}}{2}\right],\ x\in[-\sqrt{4-y^2},\sqrt{4-y^2}]\right\} \\ &\cup \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\in\left[-\frac{\sqrt{10}}{2},-1\right],\ x\in[-\sqrt{y^2-1},\sqrt{y^2-1}]\right\}. \end{aligned}$$

5. **(a) Si la fonction** $f : x \mapsto \dfrac{x\ \ln^2(x)}{2}$ **vérifie l'équation différentielle**

$$x^2\,D^2f(x)-x\ Df(x)+f(x)=g(x), \quad x\in]0,+\infty[,$$

que vaut $g(x)$ **?**

Solution. Comme f est infiniment dérivable sur $]0,+\infty[$, on a

$$\begin{aligned} Df(x) &= \frac{1}{2}\left(\ln^2(x)+\frac{2x\ln(x)}{x}\right)=\frac{\ln^2(x)}{2}+\ln(x), \\ \text{et}\quad D^2f(x) &= \frac{\ln(x)}{x}+\frac{1}{x},\ x\in]0,+\infty[. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que

$$\begin{aligned} x^2\,D^2f(x)-x\ Df(x)+f(x) &= x^2\left(\frac{\ln(x)}{x}+\frac{1}{x}\right)-x\left(\frac{\ln^2(x)}{2}+\ln(x)\right)+\frac{x\ \ln^2(x)}{2} \\ &= x\ln(x)+x-\frac{x\ln^2(x)}{2}-x\ln(x)+\frac{x\ln^2(x)}{2} \\ &= x. \end{aligned}$$

La fonction g est donc définie explicitement par $g : x \longmapsto x$.

(b) Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle

$$2D^2f(x)+Df(x)=2x.$$

Solution. L'équation donnée est une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2 non homogène.
L'équation homogène associée est $2D^2f(x)+Df(x)=0$; le polynôme caractéristique est $z\mapsto 2z^2+z=z(2z+1)$ et ses zéros sont $-1/2$ et 0. Il s'ensuit que les solutions de l'équation homogène sont les fonctions

$$f_H(x)=c_1e^{-x/2}+c_2,\ x\in\mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.
Le second membre $2x = 2x\ e^{0x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc on cherche une solution particulière définie sur $\mathbb{R}$. Comme ce second membre est une exponentielle polynôme, produit d'un polynôme de degré 1 et d'une exponentielle dont le coefficient 0 de l'argument est zéro simple du polynôme caractéristique, il existe une solution de la forme $f_P(x) = (Ax + B)x\ e^{0x} = Ax^2 + Bx$ où A et B sont des constantes à déterminer. Puisque

$$Df_P(x) \ = \ 2Ax + B \ \text{ et } \ D^2 f_P(x) \ = \ 2A$$

et que f_P est solution particulière de $2D^2 f(x) + Df(x) = 2x$, on a

$$\begin{aligned} & 2D^2 f_P(x) + Df_P(x) = 2x \\ \Leftrightarrow \quad & 2(2A) + 2Ax + B = 2x \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} A = 1 \\ 4A + B = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \quad & \begin{cases} A = 1 \\ B = -4 \end{cases} . \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient une solution particulière

$$f_P(x) = x^2 - 4x, \ x \in \mathbb{R}.$$

Les solutions de l'équation donnée sont donc les fonctions

$$f(x) = c_1 e^{-x/2} + c_2 + x^2 - 4x, \ x \in \mathbb{R}$$

où c_1, c_2 sont des constantes complexes arbitraires.

6. **Rédiger une résolution du problème suivant en justifiant le raisonnement.**

Une balle est tirée horizontalement sur une cible et on entend le bruit de l'impact 1,6 seconde plus tard. Si la vitesse de la balle est de 1020 m/s et la vitesse du son 340m/s, quel est l'éloignement de la cible ?

Solution. Soient t_b et t_s les temps (en secondes) mis respectivement par la balle et le son. L'espace parcouru par la balle et par le son est le même et la balle va trois fois plus vite que le son ; on a donc

$$t_s = 3t_b.$$

Puisqu'on entend le bruit de l'impact 1,6 seconde après le tir, on a

$$t_b + t_s = 1,6.$$

Par conséquent,

$$4t_b = 1,6 \Leftrightarrow t_b = \frac{4}{10} .$$

On en déduit que l'espace parcouru (en mètres) par la balle vaut

$$e = 1020 \ . \ \frac{4}{10} = 408.$$

La cible est par conséquent éloignée de 408 mètres.